Exercices supplémentaires sur la divisibilité

1. Déterminer tous les couples d'entiers naturels $(a; b)$ tels que $(a+4)(b-1) = 14$.
2. Donner l'ensemble des valeurs de l'entier relatif n tel que $n+2$ divise $7n+23$.
3. Pour tout entier relatif n différent de 1, on considère le nombre $A_n = \dfrac{2n^2 - n - 11}{n-1}$.
   (a) Trouver les entiers relatifs a, b et c tels que, pour tout entier n distinct de 1, on ait la relation :
   $$A_n = an + b + \frac{c}{n-1}$$
   (b) En déduire les valeurs possibles pour n telles que A_n soit un entier relatif.
4. Soit n un entier naturel.
   (a) Vérifier que $3n^2 + 7n = (n+4)(3n-5) + 20$.
   (b) En déduire les valeurs de n pour lesquelles $\dfrac{3n^2 + 7n}{n+4}$ est un nombre entier.
5. Déterminer les couples (x, y) d'entiers naturels qui vérifient : $x^2 = y^2 + 21$
6. Déterminer les entiers relatifs qui vérifient $n^2 + 2n = 35$.
7. Déterminer les entiers n tels que $2n - 5$ divise 6.
8. Soit n un entier supérieur ou égal à 1.
   (a) Démontrer que $9^{n+1} - 2^{n+1} = 11(9^n - 2^n) - 18(9^{n-1} - 2^{n-1})$.
   (b) Démontrer, par récurrence, que $3^{2n} - 2^n$ est divisible par 7.
9. En utilisant un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel n, $7^n - 2^n$ est divisible par 5.
10. Soit $n = \overline{cdu}$ un entier de trois chiffres divisible par 107. Démontrer que l'entier $x = 7d^2 + (7c - u)^2$ est aussi un multiple de 107.
11. Démontrer que tous les termes de la suite définie pour $n \geqslant 0$ par $u_n = n(n+1)(2n+1)(3n^2 + 3n - 1)$ sont des multiples de 30.
    On pourra calculer $u_{n+1} - u_n$.
12. On considère l'équation (E) : $x^2 - Sx + 56 = 0$, où S est un entier naturel.
    (a) Montrer que si (E) a une solution entière n alors n divise 56.
    (b) Montrer que si n est solution de (E), $S - n$ l'est aussi.
    (c) Déterminer les valeurs de S pour lesquelles (E) admet deux solutions dans $\mathbb{N}$.
    Pour chaque valeur de S, donner les solutions de (E).
13. On se propose de déterminer tous les entiers naturels n vérifiant la propriété P :
    $$n^2 + 11 \text{ est divisible par } n + 11$$
    (a) Utiliser un tableur ou une calculatrice pour déterminer tous les entiers naturels $n < 121$ qui vérifient la propriété P.
    (b) i. Simplifier l'expression $n^2 + 11 - (n+11)(n-11)$.
    ii. En déduire que tous entiers naturels n qui vérifient la propriété P sont inférieurs ou égaux à 121.
    iii. Conclure.
14. Annales : Asie juin 2002 (sauf question 3)